المعادلات التفاضلية

I- تقديم

1- تؤدي دراسة بعض الظواهر الفيزيائية و البيولوجية و الاقتصادية و غيرها إلى معادلات يكون فيها

المجهول دالة وتحتوي على مشتقة أو مشتقات هذه الدالة.

هذا النوع من المعادلات يسمى المعادلات التفاضلية.
يرمز عادة إلى الدالة المجهولة بالرمز y (وقد يرمز لها بأي حرف آخر مثل u , z , f ....)
حل المعادلة التفاضلية يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هده المعادلة , و مجموعة هده الدوال تسمى الحل العام للمعادلة ، كل عنصر من هده المجموعة يسمى حلا خاصا للمعادلة , كل حل يسمى كذلك تكاملا.

2- أمثلة

أ) $y'=0$ هي معادلة تفاضلية

الدالة y المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $y(x)=1$ حل خاص للمعادلة

مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$ هي الحل العام للمعادلة $y'=0$.

ب) $y'=x^2-1$ هي معادلة تفاضلية ذات المجهول y (يمكن أن نكتب $y'(x)=x^2-1$)

حلول هذه المعادلة هي الدوال الأصلية للدالة $x \to x^2-1$ على $\mathbb{R}$.

أي الحل العام لهذه المعادلة هي مجموعة الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x \to \frac{1}{3}x^2 - x + k$

حيث k عدد حقيقي اعتباطي .

II – حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

1/ المعادلة التفاضلية y´=ay

* اذا كان $a=0$ فان $y'=0$ أي أن الحل العام هو مجموعة الدوال الثابتة على $\mathbb{R}$

* اذا كان $a\neq 0$

نعلم أن $\left(e^{ax}\right)'=ae^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ ادن $x\to e^{ax}$ حل خاص للمعادلة $y'+ay=0$

ليكن y حلا اعتباطيا للمعادلة $y'+ay=0$ نضع $y(x)=z(x)e^{ax}$

ومنه $y'(x)=z'(x)e^{ax}+az(x)e^{ax}$

أي $y'(x)=z'(x)e^{ax}+ay(x)$ و بالتالي $y'(x)-ay(x)=z'(x)e^{ax}=0$

و منه $z'(x)=0$ و بالتالي $z(x)=\lambda$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن $y(x)=\lambda e^{ax}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي

نلاحظ أن الحالة $a=0$ هي ضمن الحالة العامة .

خاصية

المعادلة التفاضلية $y'=ay$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to\lambda e^{ax}$
حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to y_0e^{a(x-x_0)}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

أمثلة

1- نحل المعادلة التفاضلية $y'=2y$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=2y$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{2x}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

-2 نحل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{1}{3}y$; $y(1)=2$ هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to 2e^{\frac{1}{3}(x-1)}$

2/ حل المعادلة التفاضلية y´=ay+b

اذا كان $a=0$ فان $y'=b$ ومنه حلول المعادلة التفاضلية هي الدوال f حيث $f(x)=bx+c$

اذا كان $a\neq 0$ فان $y'=ay+b \Leftrightarrow y'=a\left(y+\frac{b}{a}\right)$

نضع $z=y+\frac{b}{a}$ و منه $z'=y'$

$$y'=ay+b \Leftrightarrow z'=az$$

$$\Leftrightarrow z(x)=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

وبالتالي $\Leftrightarrow y(x)+\frac{b}{a}=\lambda e^{ax} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow y(x)=\lambda e^{ax}-\frac{b}{a} \quad /\lambda\in\mathbb{R}$$

خاصية

ليكن a و b عددين حقيقين حيث $a\neq 0$

المعادلة التفاضلية $y'=ay+b$ تقبل ما لانهاية من الحلول و هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $x\to \lambda e^{ax}-\frac{b}{a}$

حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

نتيجة

يوجد حل وحيد للمعادلة $y'=ay+b$ يحقق الشرط $y(x_0)=y_0$ و هي الدالة $x\to\left(y_0+\frac{b}{a}\right)e^{a(x-x_0)}-\frac{b}{a}$

الشرط $y(x_0)=y_0$ يسمى الشرط البدئي

مثال

نحل المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$

حلول المعادلة التفاضلية $y'=-3y+2$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ حيث $x\to\lambda e^{-3x}+\frac{2}{3}$ حيث λ عدد حقيقي اعتباطي.

III- حل المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0

1- المعادلات التفاضلية y"+ay'+by=0 حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ تسمى معادلات تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة

2- بعض الحالات الخاصة

*- اذا كان $a=b=0$ فان $y''=0$

$$y''=0 \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R} \quad y'(x)=k \Leftrightarrow \exists(k;k')\in\mathbb{R}^2 \quad y(x)=kx+k'$$

الحل العام للمعادلة $y''=0$ هي مجموعة الدوال $x\to kx+k'$ بحيث $(k;k')\in\mathbb{R}^2$

*- اذا كان $b=0$ فان $y''+ay'=0$

$y''+ay'=0 \Leftrightarrow (y')'+ay'=0$ ومنه y' حل للمعادلة $z'+az=0$

و بالتالي $y'(x)=\lambda e^{-ax}$ بحيث λ عدد حقيقي اعتباطي

اذن الحل العام للمعادلة $y''+ay'=0$ هي الدوال الأصلية $x\to\lambda e^{-ax}$

أي الدوال $x\to\frac{-\lambda}{a}e^{-ax}+\mu \qquad (\lambda;\mu)\in\mathbb{R}^2$

3 – حل المعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0$; $(a;b)\neq(0;0)$

a)- **تذكير** لتكن f و g دالتين معرفتين على نفس المجال I

تكون f و g متناسبتين اذا و فقط اذا كان $\exists k \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad g(x) = kf(x)$

b) ليكن y_1 و y_2 حلين للمعادلة E و ليكن $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ بين أن $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E

خاصية

اذا كان y_1 و y_2 حلين للمعادلة $E: \quad y''+ay'+by=0$ و كان $(\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$ فان $\alpha y_1 + \beta y_2$ حل للمعادلة E.

خاصية

كل حل للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ هو تأليفة خطية لحلين غير متناسبين للمعادلة E.

ملاحظة لايجاد حل العام للمعادلة التفاضلية $E: \quad y''+ay'+by=0$ يكفي أن نجد حلين خاصين غير متناسبين

d)- **حل المعادلة التفاضلية** $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

لنبحث عن حلول من نوع $y : x \to e^{rx} \quad ; r \in \mathbb{R}$

y حل للمعادلة $E \Leftrightarrow r^2 e^x + are^x + be^x = 0 \Leftrightarrow r^2 + ar + b = 0$

اذن اذا كان r حل للمعادلة $r^2+ar+b=0$ فان الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E

خاصية

المعادلة $r^2+ar+b=0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$

مميز هذه المعادلة هو a^2-4b

الحالة 1 اذا كان $a^2-4b \succ 0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل حلين مختلفين r_1 و r_2 .

الدالتان $x \to e^{r_1 x} \quad ; \quad x \to e^{r_2 x}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية E

نلاحظ أن $x \to e^{r_1 x} \quad ; \quad x \to e^{r_2 x}$ غير متناسبين

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحالة 2 اذا كان $a^2-4b=0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل حل مزدوج r .

الدالة $x \to e^{rx}$ حل للمعادلة E . نبين أن $x \to xe^{rx}$ حل للمعادلة E .

الدالتان $x \to e^{rx}$ و $x \to xe^{rx}$ غير متناسبتين لأن $x \to x\dfrac{e^{rx}}{e^{rx}}$ غير ثابتة.

اذن حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

الحالة 3 اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان $r^2+ar+b=0$ تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p+iq$ و $r_2 = p-iq \quad (q \neq 0)$

$$e^{r_1 x} = e^{px}(\cos qx + i \sin qx) = e^{px} \cos qx + ie^{px} \sin qx$$

نبين أن الدالتين $x \to e^{px} \sin x \quad ; \quad x \to e^{px} \cos x$ حلين للمعادلة E.

لاحظ $\left(p = -\dfrac{a}{2} \quad ; \quad q = \dfrac{\sqrt{4b-a^2}}{2} \right)$

و بما أن الدالتين $x \to e^{px} \sin x \quad ; \quad x \to e^{px} \cos x$ غير متناسبتين فان حلول المعادلة التفاضلية

E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha \cos qx + \beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

خاصية

لتكن المعادلة التفاضلية E: $E: y''+ay'+by=0 \quad ; \quad (a;b) \in \mathbb{R}^2$ و لتكن $r^2+ar+b=0$ المعادلة المميزة

-* اذا كان $a^2-4b \succ 0$ فان المعادلة المميزة لها جدرين مختلفين $r_1 \quad ; \quad r_2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b=0$ فان المعادلة المميزة تقبل حل مزدوج r .

و حلول المعادلة E هي الدوال $x \to (\alpha+\beta x)e^{rx}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

-* اذا كان $a^2-4b \prec 0$ فان المعادلة المميزة تقبل جذرين مترافقين $r_1 = p+iq$ و $r_2 = p-iq$

و حلول المعادلة التفاضلية E هي الدوال $x \to e^{px}(\alpha\cos qx+\beta sixqx)$ حيث α و β عددان اعتباطيان.

الحل الذي يحقق $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

يوجد حل وحيد للمعادلة التفاضلية E يحقق الشرطين $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$

الشرطان $y(x_0)=y_0 \quad ; \quad y'(x_0)=y'_0$ يسميان الشرطين البدئيين .

يمكن إعطاء شرطين بدئيين آخرين.

ملاحظة

لدينا $\alpha\cos qx+\beta\sin qx=k\left(\frac{\alpha}{k}\cos qx+\frac{\beta}{k}\sin qx\right)=k(\cos\varphi\cos qx+\sin\varphi\sin qx)=k\cos(qx-\varphi)$

بوضع $k=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \quad ; \quad \sin\varphi=\frac{\beta}{k} \quad ; \quad \cos\varphi=\frac{\alpha}{k}$

تستنتج اذا كان $a^2-4b\prec 0$ فان $x\to ke^{px}\cos(qx-\varphi)$ حيث k وφ اعتباطيان

تمرين 1- حل المعادلة $y''+2y'-\frac{5}{4}y=0$ و حدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0)=1 \quad ; \quad y_1'(0)=-1$

2- حل المعادلة $y''+4y'+4y=0$

3- حل المعادلة $y''+2y'+5y=0$

الجواب

1- ليكن Δ مميز $r^2+2r-\frac{5}{4}=0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y''+2y'-\frac{5}{4}y=0$

$\Delta=4+5=9$ ومنه $r_1=\frac{-2+3}{2}=\frac{1}{2}$ و $r_2=\frac{-2-3}{2}=-\frac{5}{2}$

ومنه حلول المعادلة هي الدوال $x\to\alpha e^{\frac{1}{2}x}+\beta e^{-\frac{5}{2}x}$ حيث α و β عددان اعتباطيان

لنحدد الحل الخاص y_1 حيث $y_1(0)=1 \quad ; \quad y_1'(0)=-1$

لدينا $y_1(x)=\alpha e^{\frac{1}{2}x}+\beta e^{-\frac{5}{2}x}$ ومنه $y'_1(x)=\frac{\alpha}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{5\beta}{2}e^{-\frac{5}{2}x}$

$$\begin{cases}y_1(0)=1\\y_1'(0)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\\frac{\alpha}{2}-\frac{5\beta}{2}=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=1\\\alpha-5\beta=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}\\\beta=\frac{1}{2}\end{cases}$$

اذن $y_1(x)=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x}+e^{-\frac{5}{2}x}\right)$

2- مميز $r^2+4r+4=0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y''+4y'+4y=0$ منعدم ومنه $r=-2$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x\to(\alpha+\beta x)e^{-2x}$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

3- مميز $r^2+2r+5=0$ المعادلة المميزة للمعادلة $y''+2y'+5y=0$ هو $\Delta=4-20=-16=(4i)^2$

ومنه $r_1=-1-2i$ و $r_2=-1+2i$

و حلول المعادلة E هي الدوال $x\to e^{-x}(\alpha\cos 2x+\beta six2x)$ حيث حيث α و β عددان اعتباطيان

حالات خاصة

*- اذا كان $a\succ 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha\cos\sqrt{a}x+\beta\sin\sqrt{a}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

*- اذا كان $a\prec 0$ فان حلول المعادلة التفاضلية $y''+ay=0$ هي الدوال المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $x\to\alpha e^{\sqrt{-a}x}+\beta e^{-\sqrt{-a}x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

مثال حل المعادلتين $y''+2y=0$; $y''-4y=0$

حلول المعادلة $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha\cos\sqrt{2}x+\beta\sin\sqrt{2}x$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.

حلول المعادلة $y''-4y=0$ $y''+2y=0$ هي الدوال المعرفة بـ $x \to \alpha e^{2x}+\beta e^{-2x}$ حيث $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$.